Erinnerung:

Ab jetzt betrachten wir $\mathbb{R}$ immer mit der Standard-Norm $|\ \ |$. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition: Eine symmetrische Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle\colon\ V \times V \to \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$$

heisst *positiv definit*, wenn zusätzlich gilt:

$$\boxed{\forall\, v \in V \setminus \{0\}\colon\ \langle v,v\rangle > 0.}$$

Der *Betrag* eines Vektors $v \in V$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist dann die Zahl

$$\|v\| \ :=\ \sqrt{\langle v,v\rangle}\ \in\ \mathbb{R}^{\geqslant 0}.$$

Definition: Eine positiv definite symmetrische Bilinearform heisst ein *Skalarprodukt*. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heisst *euklidischer Vektorraum* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

Definition: Das *Standard-Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$ ist für $x = (x_i)_i$ und $y = (y_i)_i$ gegeben durch

$$\boxed{\langle x,y\rangle \ :=\ x^T y \ =\ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.}$$

Der zugehörige Betrag ist die ℓ_2-Norm

$$\|x\| \ :=\ \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Beispiel: Sei V ein Unterraum des Raums der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ für reelle Zahlen $a < b$. Sei φ eine stetige Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ mit höchstens endlich vielen Nullstellen. Dann ist

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) g(t) \varphi(t)\, dt}$$

wohldefiniert

bilinear.

symmetrisch.

ein Skalarprodukt auf V.

$$f \neq 0 \Rightarrow \quad \langle f, f \rangle = \int_a^b \underbrace{f(t)^2 \cdot \varphi(t)}_{\geq 0} \cdot dt$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in [a,b] : f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)^2 \geq c > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall x' \in [a,b] : |x' - x| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x')^2 \geq \frac{c}{2}$$

$x' \in [a,b] \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle \geq \int_{[a,b] \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} \frac{c}{2} \varphi(t)\, dt > 0.$$

$\Rightarrow$ positiv definit.

Definition: Eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $x^T A\, x > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ heisst *positiv definit.*

$\langle x, y \rangle := x^T \cdot A \cdot y$

Proposition: Sei B eine geordnete Basis von V. Eine symmetrische Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist positiv definit genau dann, wenn die Darstellungsmatrix $[\langle\ ,\ \rangle]_B$ positiv definit ist.

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "\langle \cdot, \cdot \rangle"] & \mathbb{R} & A \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "\varphi_B \cong"] \arrow[ur, "(x,y) \mapsto x^T A y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Beispiel: Für jede positiv definite symmetrische reelle $n \times n$-Matrix A ist die folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^T A\, y,}$$

und umgekehrt hat jedes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ diese Form.

10.6 Grundeigenschaften

Im diesem und den folgenden Abschnitten sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit der zugehörigen Betragsfunktion $\|\ \|$.

Satz: *(Cauchy-Schwarz Ungleichung)* Für beliebige $v, w \in V$ gilt

$$\boxed{|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|.}$$

Weiter gilt Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Bew.: $w = \lambda v \Rightarrow \langle v, w\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \langle v, v\rangle = \lambda \cdot \|v\|^2$

$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \cdot \langle v, v\rangle = \lambda^2 \|v\|^2$

$\Rightarrow \|w\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

$\Rightarrow |\langle v, w\rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|w\|$

Analog wenn $v = \mu w$. Also gilt Gleichheit, wenn v, w lin. abh. sind.

$v = 0 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$. $\Rightarrow$ okay.

Sei also $v \neq 0$. Setze $\boxed{\lambda := \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2}}$. $\Longrightarrow \langle v, w\rangle = \lambda \cdot \|v\|^2$

$\boxed{0 \leq \|w - \lambda v\|^2} = \langle w - \lambda v, w - \lambda v\rangle = \langle w, w - \lambda v\rangle - \lambda \cdot \langle v, w - \lambda v\rangle$

$= \langle w, w\rangle - \lambda \langle w, v\rangle - \lambda \langle v, w\rangle + \lambda^2 \langle v, v\rangle$

$= \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w\rangle + \lambda^2 \cdot \|v\|^2$

$$= \|w\|^2 - 2\lambda^2\|v\|^2 + \lambda^2\|v\|^2$$
$$= \|w\|^2 - \lambda^2\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2\|v\|^2 \leq \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda|\cdot\|v\| \leq \|w\| \quad \Rightarrow \quad |\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\cdot\|w\|.$$

$$|\lambda| = \left|\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|}\right|$$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ $w - \lambda v = 0 \Rightarrow w = \lambda v \Rightarrow$ lin. Abh.

Proposition: Der zugehörige Betrag $\| \ \|$ ist eine Norm auf V.

Bew.: $V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ wohldef., definit.

$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ siehe oben.

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2$$

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

qed.

Proposition: Für beliebige $v, w \in V$ gilt $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$ genau dann, wenn einer der Vektoren ein nicht-negatives skalares Vielfaches des anderen ist.

Bew.: Gleichheit hier $\iff \langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|$.

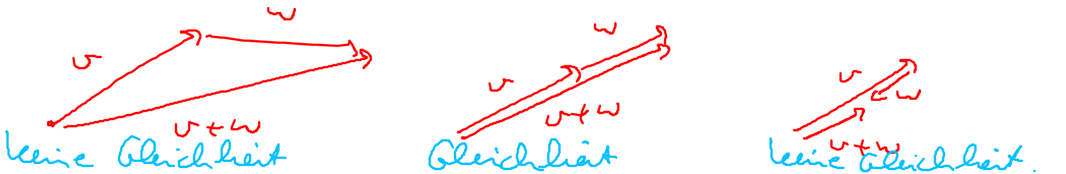
$\iff |\langle v,w\rangle| = \|v\|\cdot\|w\|$ und $\langle v,w\rangle \geq 0$.

$\iff v,w$ lin. abhängig und

$v = 0 \Rightarrow$ okay

$v \neq 0$ $\iff w = \lambda v$ für $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$ und $\lambda \geq 0$

qed.



Definition: Ein Vektor $v \in V$ mit Betrag $\|v\| = 1$ heisst *normiert.*

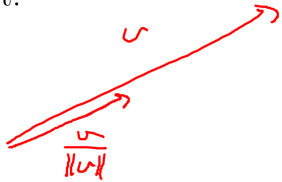
Proposition: Für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ ist $\boxed{\dfrac{v}{\|v\|}}$ normiert.

Bew.: $\left|\dfrac{v}{\|v\|}\right| = \dfrac{\|v\|}{\|v\|} = 1$ qed.

„Richtung von v"

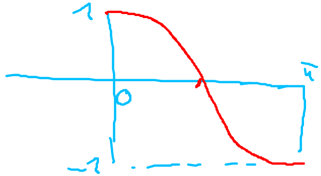
$v = \|v\| \cdot \dfrac{v}{\|v\|}$ normiert

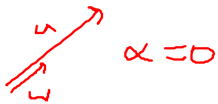
Skalar

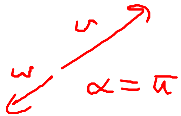


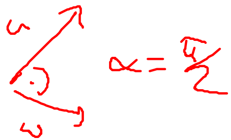
Definition: Der *Winkel* zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren $v, w \in V$ ist die eindeutige reelle Zahl $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ mit

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle.}$$









Definition: Zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $\langle v, w\rangle = 0$ heissen zueinander *orthogonal*, und man schreibt $v \perp w$.

Ist ein Vektor $v \in V$ orthogonal zu jedem Element einer Teilmenge $S \subset V$, so heissen v und S *orthogonal* und man schreibt $v \perp S$ oder $S \perp v$.

Ist jedes Element einer Teilmenge $S \subset V$ orthogonal zu jedem Element einer Teilmenge $S' \subset V$, so heissen S und S' *orthogonal* und man schreibt $S \perp S'$.

Bemerkung: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $v \perp v \Leftrightarrow v = 0$.

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff \|v\|^2 = 0$$

Proposition: Zwei Vektoren v und w sind orthogonal genau dann, wenn gilt

$$\boxed{\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.}$$

Bew.: $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$

v, w orthogonal $\overset{\text{Def.}}{\iff} \langle v, w\rangle = 0 \iff \delta = 0.$

qed.

10.7 Orthonormalbasen

Definition: Eine Teilmenge $S \subset V \setminus \{0\}$, so dass je zwei verschiedene Elemente von S zueinander orthogonal sind, heisst *Orthogonalsystem.* Ist zusätzlich jeder Vektor in S normiert, so heisst S ein *Orthonormalsystem.* Ist zusätzlich S eine Basis von V, so heisst S je nach Fall eine *Orthogonalbasis* bzw. eine *Orthonormalbasis von V.*

$\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$

Ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i \in V \setminus \{0\}$ und $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$ heisst *Orthogonalsystem.* Ist zusätzlich jedes v_i normiert, so heisst das Tupel ein *Orthonormalsystem.* Ist das Tupel zusätzlich eine geordnete Basis von V, so heisst es je nach Fall eine *geordnete Orthogonalbasis* bzw. *geordnete Orthonormalbasis von V.*

Proposition: Jedes Ortho~~normal~~gonalsystem ist linear unabhängig.

Bew.: Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, $(v_1, \ldots, v_n)$ Orthogonalsystem $\Rightarrow \forall j: \langle v_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i}_{=\,0} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=\,0 \text{ für } j \neq i} = \alpha_j \overbrace{\|v_j\|^2}^{>0}$

$\langle v_j, 0 \rangle = 0$ $\quad \Rightarrow \alpha_j = 0.$ $\quad$ qed.

$(v_1, \ldots, v_n)$ ||

Proposition: Eine geordnete Basis B von V ist eine Orthogonalbasis genau dann, wenn die Darstellungsmatrix des Skalarprodukts $[\langle\ ,\ \rangle]_B$ eine Diagonalmatrix ist. Sie ist eine Orthonormalbasis genau dann, wenn die Darstellungsmatrix die Einheitsmatrix ist.

Bew.: $[\langle \cdot, \cdot \rangle]_B = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1..n}$ Diagonalmatrix $\Leftrightarrow$ Orthogonalbasis.

$\forall i = j: \langle v_i, \cancel{v_j}\, i \rangle = \|v_i\|^2 = 1 \Leftarrow$ Einheitsmatrix $\Leftrightarrow$ ONB. Orthonormalbasis. qed.

Proposition: Sei B eine Orthonormalbasis von V, und sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt $\langle b, v\rangle = 0$ für fast alle $b \in B$, und v hat die Entwicklung

$$v = \sum_{b\in B}{}' \langle b, v\rangle \cdot b.$$

Beweis: Schreibe $v = \sum_{b \in B}{}' \alpha_b \cdot b$ mit $\alpha_b \in \mathbb{R}$, fast alle $= 0$.

$$\Rightarrow \forall b \in B: \quad \langle b, v\rangle = \langle b, \sum_{b'\in B}{}' \alpha_{b'} b'\rangle = \sum_{b'\in B}{}' \alpha_{b'} \cdot \underbrace{\langle b, b'\rangle}_{= \begin{cases} 0 & b \neq b' \\ 1 & b = b' \end{cases}} = \alpha_b$$

$\Rightarrow$ fast alle $\langle b, v\rangle = 0$

und $v = \sum_{b\in B}{}' \langle b, v\rangle \cdot b$. $\qquad$ qed.